基于 Kanai-Tajimi 谱的非黏滞阻尼结构地震动响应的简明闭式解

李创第[1],贺王涛[1],葛新广[1],王昌盛[2]

(1. 广西科技大学土木建筑工程学院,545006 柳州;2. 黄淮学院建筑工程学院,463000 驻马店)

摘　要:针对非黏滞阻尼结构基于 Kanai-Tajimi 谱的卷积-微分混合动力方程解法较繁琐的问题,提出了一种新的简明封闭解法。非黏滞阻尼模型能较好地模拟实际工程材料的阻尼特征,常以指数型核函数的卷积形式表示,给出其对应的微分型本构关系。Kanai-Tajimi 谱随机地震动模型能较好地描述场地的随机地震动特性,其工程应用时所获得的结构地震动响应表达式复杂,但其可用滤波方程表示为基于白噪声激励的随机过程。利用非黏滞阻尼结构的微分型本构关系和 Kanai-Tajimi 谱的滤波方程,将基于复杂地震动激励卷积-微分型动力方程转化为基于白噪声激励的全微分型动力方程组;然后基于复模态法及 Dirac 函数的性质,获得了耗能结构系列响应(位移及速度)0~2 阶谱矩的简明解;最后,分析了基于首超破坏准则及 Markov 假定的非黏滞阻尼结构的动力可靠度。对一算例运用所提方法与虚拟激励法进行对比分析,证明所提封闭解的正确性和高效性,并可作为虚拟激励法精度的验证方法。

关键词: Kanai-Tajimi 谱;非黏滞阻尼结构;滤波方程;简明封闭解;谱矩;动力可靠度

中图分类号:TU318　　　　**文献标志码:**A

Concise closed-form solution of seismic responses of non-viscous damping structures based on Kanai-Tajimi spectrum

LI Chuangdi[1], HE Wangtao[1], GE Xinguang[1], WANG Changsheng[2]

(1. School of Civil Engineering and Architecture, Guangxi University of Science and Technology, 545006 Liuzhou, China;
2. Architectural Engineering Institute, HuangHuai University, 463000 Zhumadian, China)

Abstract: In order to resolve the tedious problem of convolutional-differential hybrid equation solution based on Kanai-Tajimi spectrum of non-viscous damping structures, a new concise closed solution method is proposed. The non-viscous damping model usually expressed in the convolution form of an exponential kernel function can well simulate the damping characteristics of practical engineering materials, while the corresponding differential constitutive relationship of the damper is given in this paper. The random ground motion characteristics of the site can be better described by Kanai-Tajimi spectrum random ground motion model, from which the structural ground motion response expression obtained in its engineering ap-

收稿日期:2020-10-16　　　　**修回日期:**2021-12-20

基金项目:国家自然科学基金资助项目(No. 51468005);广西科技大学创新团队支持计划(2016 年);河南省科技攻关项目(No. 212102310976);河南省高等学校重点科研项目计划支持(No. 22B560008)

通信作者:李创第,教授,研究方向为工程结构振动控制。E-mail: lichuangdi1964@163.com

引用格式:李创第,贺王涛,葛新广,等. 基于 Kanai-Tajimi 谱的非黏滞阻尼结构地震动响应的简明闭式解[J]. 应用力学学报,2022,39(1):79-86.
LI Chuangdi, HE Wangtao, GE Xinguang, et al. Concise closed-form solution of seismic responses of non-viscous damping structures based on Kanai-Tajimi spectrum[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2022, 39(1):79-86.

plication is complex, but it can be expressed as a random process of white noise excitation by filtering equation. Using the differential constitutive relationship of the non-viscous damping structures and the filtering equation of Kanai-Tajimi spectrum, the complex ground motion excitation convolution-differential dynamic equation is converted into a fully differential dynamic equation system excited by white noise, and then the complex modal method and the concise characteristics of the white noise excitation are used to obtain the variance of the structural displacement and the concise closed solution of 0-2 order spectral moment. Finally, the dynamic reliability of the structure is analyzed based on the first exceedance failure criterion and Markov distribution assumptions. A comparative analysis of the method in this paper and the virtual excitation method for a calculation example shows that the closed solution proposed in this paper is correct and efficient, and can be used as a verification method for the accuracy of the virtual excitation method.

Key words: Kanai-Tajimi spectrum; non-viscous damping structure; filtering equation; concise closed solution; spectral moment; dynamic reliability

基于地震灾害所导致的人员伤亡和财产损失的严重性，防震减灾[1-2]研究成为当下重要的研究课题。阻尼是振动控制领域中用来描述振动过程能量耗散的关键参数，对结构动力响应的影响至关重要[3-4]。但鉴于阻尼的作用机理异常复杂，目前仍没有统一的阻尼模型。工程上应用较为广泛的是黏滞阻尼模型，该模型认为阻尼力与速度成正比，未考虑振动滞后现象，与实际不符。Biot[5]根据阻尼力与质点速度的时间历程相关的特性，提出了一种用质点振动速度与核函数（常为指数型）卷积的阻尼力模型。Liu[6-7]研究了时程地震动激励下非黏滞阻尼结构的动力响应分析。段忠东等[8]利用拉普拉斯变换研究了非黏滞阻尼模型中的阻尼系数识别问题，研究表明非黏滞阻尼模型能较好地反映实际结构的耗能性能。文献[9]针对非黏滞阻尼结构的地震动时程激励，提出了一种指数核函数和高斯核函数结构系统直接积分的简化方法。以上研究都是针对非黏滞阻尼结构基于时程激励下的动力响应方法进行的研究。

通过对大量的地震动观测资料研究表明，地震动具有显著的随机性，并且各种研究还提出了数种地震动随机模型[10-12]。Kanai-Tajimi 模型[10-11]能考虑场地的动力特征对地震动的影响，有着广泛的工程应用。目前基于 Kanai-Tajimi 谱激励下的结构地震动响应表达式均较为复杂，不利于工程应用。故研究基于 Kanai-Tajimi 模型激励下非黏滞阻尼结构简明响应解，具有重要的工程实践意义。

研究随机激励引起结构地震动响应的方法有频域法和时域法[12-13]。在频域法中，虚拟激励法[13-14]和传递函数法[15-16]为其主要方法，但上述方法分析结构响应方差或 0 ~ 2 阶谱矩时需要对结构响应的功率谱在频域[0, +∞)进行数值积分，虽提出了一些快速算法[8,17-18]，但对于复杂的激励模型或超大型结构的动力响应分析仍然存在计算效率低及精度不足的问题。在时域法中，复模态法是典型方法[12,19-20]，其将任意形式的线性振动体系进行复模态解耦，将结构的随机响应的协方差表示成脉冲函数与激励协方差的二重积分，故其应用的前提是激励要有协方差且越简单、越容易求封闭解。葛新广等[19-20]分别利用 Kanai-Tajimi 谱和 Clough-Penzien 谱的滤波方程，将复杂的地震动激励转化为具有 Dirac 函数表示的协方差，给出了时域法求解随机响应的新思路。

针对以上非黏滞阻尼结构地震动响应研究的不足，本文利用文献[19-20]所提方法研究了指数型核函数的非黏滞阻尼结构基于 Kanai-Tajimi 谱随机地震动响应的简明封闭解。首先利用 Kanai-Tajimi 谱的滤波振动方程将复杂的地振动精确地表示成基于 Dirac 函数表示的白噪声的随机地震动；其次将指数型非黏滞阻尼结构积分型的本构关系转换成等效的微分型本构关系；然后联立地震动的滤波振动方程及微分型的非黏滞阻尼本构关系，获得结构地震动基于白噪声激励的全微分方程组，并运用复模态法进行解耦，从而获得结构位移速度等响应的方差、功率谱和 0 ~ 2 阶谱矩的简明解；最后研究基于首次超越破坏准则及 Markov 超越分布规则的动力可

靠度[21-23]。

1 基于 Kanai-Tajimi 谱非黏滞阻尼结构地震动方程重构

对于单自由度非黏滞阻尼结构,地震动方程为

$$m\ddot{x} + \int_0^t G(t-\tau)\dot{x}(\tau)\mathrm{d}\tau + kx = -m\ddot{x}_g \quad (1)$$

式中:m、k 分别为结构的质量和刚度;$\ddot{x}$、$\dot{x}$、x 分别为结构相对于地面的加速度、速度、位移;$\ddot{x}_g$ 为 Kanai-Tajimi 谱地面运动加速度;$G(t)$ 为非黏滞阻尼系统的阻尼核函数,一般采用指数形式,即

$$G(t) = \sum_{i=1}^{n} G_i(t) = \sum_{i=1}^{n} c\alpha_i \mathrm{e}^{-\alpha_i t} \quad (2)$$

式中:c 为阻尼常数;n 为阻尼作用下松弛因子的数量;α_i 为松弛因子。

令 $P_i = \int_0^t c\alpha_i \mathrm{e}^{-\alpha_i(t-\tau)}\dot{x}(\tau)\mathrm{d}\tau$,并对 P_i 求导得

$$\dot{P}_i + \alpha_i P_i - c\alpha_i \dot{x}(t) = 0 \quad (3)$$

Kanai-Tajimi 谱地震动模型可将地面运动表示为基于白噪声激励的随机过程,即

$$\ddot{x}_g = \ddot{u}_g + \ddot{u}_R \quad (4)$$

$$\ddot{u}_g + 2\xi_g\omega_g\dot{u}_g + \omega_g^2 u_g = -\ddot{u}_R \quad (5)$$

式中:$\ddot{u}_g$、$\dot{u}_g$、u_g 分别为场地土相对于基岩运动的加速度、速度、位移;$\ddot{u}_R$ 为基岩的绝对加速度,且具有白噪声特征;ξ_g、ω_g 分别为基岩以上场地土的阻尼比和频率。

联立式(2)~式(5),式(1)用矩阵形式表示,即

$$\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{r}\ddot{u}_R \quad (6)$$

$$\boldsymbol{y} = [\dot{x} \quad \dot{u}_g \quad x \quad u_g \quad P_1 \quad \cdots \quad P_n]^{\mathrm{T}} \quad (7)$$

式中

$$\boldsymbol{r} = [-1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]^{\mathrm{T}}_{(n+4)\times 1},$$

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2\xi_g\omega_g & 0 & 0 & 0 \\ m & 0 & 0 & -2m\xi_g\omega_g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{(n+4)\times(n+4)},$$

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \omega_g^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & -m\omega_g^2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c\alpha_1 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ -c\alpha_n & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix}_{(n+4)\times(n+4)}$$

2 复模态解耦

运用复模态理论[12,19-20],式(6)存在特征值矩阵 $\boldsymbol{P}$、右特征向量矩阵 $\boldsymbol{U}$ 和左特征向量矩阵 $\boldsymbol{V}$,使其解耦,即

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{U})^{-1} \cdot (\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{U}) \quad (8)$$

式中 $\boldsymbol{P}$ 为对角阵。

引入复模态变换

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{z} \quad (9)$$

式中 $\boldsymbol{z}$ 为复模态变量。

将式(9)代入式(6),并在其前左乘$\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}$ 得

$$\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{U}\dot{\boldsymbol{z}} + \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{U}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}\ddot{u}_R \quad (10)$$

由式(8)可知,式(10)可改写为

$$\dot{\boldsymbol{z}} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{\eta}\ddot{u}_R \quad (11)$$

式中 $\boldsymbol{\eta} = (\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{U})^{-1} \cdot (\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r})$。

由于 $\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵,根据哈梅积分,式(11)的分量为

$$z_i = \eta_i \int_0^t \mathrm{e}^{P_i\tau}\ddot{u}_R(t-\tau)\mathrm{d}\tau \quad (12)$$

式中 z_i、η_i 分别为 $\boldsymbol{z}$、$\boldsymbol{\eta}$ 的分量。

根据式(7)、式(9)及式(12),则结构相对于地面的位移及速度可分别表示为

$$x = \boldsymbol{u}_3\boldsymbol{z} = \sum_{i=1}^{n+4} \lambda_{3,j}\int_0^t \mathrm{e}^{p_i\tau}\ddot{u}_R(t-\tau)\mathrm{d}\tau \quad (13)$$

$$\dot{x} = \boldsymbol{u}_1\boldsymbol{z} = \sum_{i=1}^{n+4} \lambda_{1,j}\int_0^t \mathrm{e}^{P_i\tau}\ddot{u}_R(t-\tau)\mathrm{d}\tau \quad (14)$$

式中:t 为地震激励作用时间;$\boldsymbol{u}_i$为右特征向量矩阵 $\boldsymbol{U}$ 的第 i 行向量;响应的模态强度系数 $\lambda_{i,j}$为

$$\lambda_{i,j} = u_{i,j} \cdot \eta_j \quad (15)$$

式中 $u_{i,j}$为右特征向量矩阵 $\boldsymbol{U}$ 第 i 行、第 j 列的元素。

3 结构响应的方差及功率谱

观察式(13)和式(14),结构位移和速度统一表

示为

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{n+4}\mu_i\int_0^t e^{p_i\tau}\ddot{u}_R(t-\tau)d\tau = \sum_{i=1}^{n}Y_i(t) \tag{16}$$

由式(16)可得,结构的响应分量为

$$Y_i(t) = \mu_i\int_0^t e^{p_i\tau}\ddot{u}_R(t-\tau)d\tau \tag{17}$$

式中:$\mu_i=\lambda_{3,j}$为结构位移的模态强度系数;$\mu_i=\lambda_{1,j}$为结构的速度的模态强度系数;τ 为时间差。

结构响应的协方差为

$$C_Y(\tau) = E[Y(t)Y(t+\tau)] = \sum_{k=1}^{n+4}\sum_{i=1}^{n+4}E[Y_k(t)Y_i(t+\tau)] \tag{18}$$

由式(18)可得,结构响应分量的协方差为

$$E[Y_k(t)Y_i(t+\tau)] = \mu_k\mu_i\int_0^\infty\int_0^\infty e^{p_k u}e^{p_i v}\times E[\ddot{u}_R(t-u)\ddot{u}_R(t+\tau-v)]dudv \tag{19}$$

根据相关函数与协方差的关系,式(19)改写为

$$E[Y_k(t)Y_i(t+\tau)] = \mu_k\mu_i\int_0^\infty\int_0^\infty e^{p_k u}e^{p_i v}C_{\ddot{u}_R}(u+\tau-v)dudv \tag{20}$$

式中 u、v 为积分变量。

白噪声随机激励的协方差 $C_{\ddot{u}_R}(\tau)$可表示为

$$C_{\ddot{u}_R}(\tau) = 2\pi S_0\delta(\tau) \tag{21}$$

式中:S_0 为地震动强度常数;$\delta(\tau)$为 Dirac 函数。

将式(21)代入式(20)得

$$E[Y_k(t)Y_i(t+\tau)] = 2\pi S_0\mu_k\mu_i\int_0^\infty\int_0^\infty e^{p_k u}e^{p_i v}\times\delta(u+\tau-v)dudv \tag{22}$$

根据 Dirac 函数的性质,式(22)化为一重积分

$$E[Y_k(t)Y_i(t+\tau)] = 2\pi S_0\mu_k\mu_i\int_0^\infty e^{p_k(u+\tau)}e^{p_i u}du \tag{23}$$

对式(23)积分得

$$E[Y_k(t)Y_i(t+\tau)] = 2\pi S_0\mu_k\mu_i\frac{-e^{p_k\tau}}{p_k+p_i} \tag{24}$$

由式(18)、式(24),单自由度非黏滞结构基于 Kanai-Tajimi 随机激励下的响应表达式为

$$C_Y(\tau) = E[Y_k(t)Y_i(t+\tau)] = -2\pi S_0\sum_{k=1}^{n+4}\sum_{i=1}^{n+4}\frac{\mu_k\mu_i}{p_k+p_i}e^{p_k\tau} \tag{25}$$

$$D_k = \sum_{i=1}^{n+4}\frac{\mu_k\mu_i}{p_k+p_i} \tag{26}$$

式(25)可表示为

$$C_Y(\tau) = -2\pi S_0\sum_{k=1}^{n+4}D_k e^{p_k\tau} \tag{27}$$

当 $\tau=0$ 时,结构响应的协方差等于结构响应的方差,即

$$\sigma_Y^{\ 2} = C_Y(0) = -2\pi S_0\sum_{k=1}^{n+4}D_k \tag{28}$$

式(28)可表示结构振动特征值指数函数的线性组合。

由 Wiener-Khinchin 关系,结构响应的单边功率谱 $S_Y(\omega)$为

$$S_Y(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty C_Y(\tau)\cos(\omega\tau)d\tau \tag{29}$$

将式(27)代入式(29)得

$$S_Y(\omega) = 2S_0\sum_{k=1}^{n+4}\frac{D_k p_k}{\omega^2+p_k^{\ 2}} \tag{30}$$

由式(16)、式(28)、式(30)可知,结构基于 Kanai-Tajimi 激励下的位移及速度的方差和功率谱的表达式简洁明了。

4 结构响应的 0 ~ 2 阶谱矩分析

由随机振动理论[12],结构响应 $Y(t)$的 i 阶谱矩 β_i 可表示为

$$\beta_i = 2\int_0^\infty\omega^i S_Y(\omega)d\omega \tag{31}$$

将式(30)代入式(31),并令 $i=0$,则结构响应的 0 阶谱矩可表示为

$$\beta_0 = 4\sum_{k=1}^{n+4}\int_0^\infty D_k\frac{p_k}{\omega^2+p_k^2}d\omega \tag{32}$$

对式(32)积分可得

$$\beta_0 = -2\pi S_0\sum_{k=1}^{n+4}D_k \tag{33}$$

平稳激励下的结构响应 Y_n 的 0 阶谱矩 β_0,通过比较式(33)及式(28),两式完全相同,说明了所提方法分析结构响应 0 阶谱矩的正确性。由随机振动理论[12],结构响应的速度的 0 阶谱矩等于其位移的 2 阶谱矩,即

$$\beta_2 = \sigma_{\dot{Y}}^2(0) \tag{34}$$

式中 $\dot{Y}$ 为 Y 对时间 t 的一阶导数。

由谱矩的定义可得,1 阶谱矩 β_1 可表示为

$$\beta_1 = 4S_0\sum_{k=1}^{n+4}\int_0^\infty D_k\frac{p_k\omega}{\omega^2+p_k^2}d\omega \tag{35}$$

对式(35)进行积分得

$$\beta_1 = -2S_0\sum_{k=1}^{n+4}D_k p_k \ln p_k^2 + 2S_0\lim_{\omega\to\infty}\ln(\omega^2+p_k^2)\sum_{k=1}^{n+4}D_k p_k \qquad (36)$$

由文献[12]可知，$\sum_{k=1}^{n+4}D_k p_k=0$，且实际频率 ω 不可能无限大，故1阶谱矩 β_1 可表示为

$$\beta_1 = -2S_0\sum_{k=1}^{n+4}D_k p_k \ln p_k^2 \qquad (37)$$

由式(33)、式(34)、式(37)可知，本文所获得的结构基于Kanai-Tajimi激励下的相对于地面位移的0~2阶谱矩均有闭式解，表达式简洁明了，与文献[12-13]所提方法相比，本文方法不需要积分。

5 动力可靠度

工程上，线性结构可靠度的分析主要是基于首超破坏准则及Markov分布规则[22-23]，其中文献[23]提出了双侧相同超越界限的可靠度计算公式

$$\zeta = \frac{R(n)}{\sigma_x} \qquad (38)$$

$$P_f = \exp\left\{-\frac{\sigma_{\dot{x}}T}{\pi\sigma_x}\left[\exp\left(-\frac{\zeta^2}{2}\right)\frac{1-\exp\left(-\sqrt{\frac{\pi}{2}}q_s\zeta\right)}{1-\exp\left(-\frac{\zeta^2}{2}\right)}\right]\right\} \qquad (39)$$

式中：$R(n)$为第 n 年的界限值；T 为一次激励的持续时间；σ_x、$\sigma_{\dot{x}}$ 分别为响应 x 和其变化率的方差；q_s 为谱参数，其计算公式为

$$q_s = \sqrt{1-\frac{\beta_1^2}{\beta_0\beta_2}} \qquad (40)$$

式中 β_0、β_1、β_2 分别由式(33)、式(37)、式(34)计算得出。

6 算 例

建立在7度区二类场地上的单层结构，梁、柱尺寸分别为300 mm×550 mm、600 mm×600 mm，层高为6 m，跨度宽为6 m，按刚性楼板层假定。结构质量 $m=1.5\times10^5$ kg，结构抗侧刚度 $k=3.6\times10^7$ N/m，地震动激励为Kanai-Tajimi谱，其参数取值：场地阻尼比 $\xi_g=0.72$，特征频率 $\omega_g=15.71$ rad/s，白噪声强度因子 $S_0=31.76\times10^{-4}$ m²/s³；非黏滞阻尼模型核函数 $G(t)=c(\alpha_1 e^{-\alpha_1 t}+\alpha_2 e^{-\alpha_2 t})$，其阻尼核函数参数取值参考文献[6]，$c=9.5\times10^4$ N·s/m，$\alpha_1=125$ s^{-1}，$\alpha_2=255$ s^{-1}。

6.1 地面加速度 $\ddot{x}_g$ 的功率谱对比分析

地面加速度可由式(4)、式(5)、式(7)、式(16)联立可得，即

$$\ddot{x}_g = -2\xi_g\omega_g\dot{u}_g-\omega_g^2 u_g = \sum_{i=1}^{n+4}\kappa_i\int_0^t e^{p_i\tau}\ddot{u}_R(t-\tau)\mathrm{d}\tau \qquad (41)$$

式中 κ_i 为地面加速度的模态强度系数，且 $\kappa_i=-2\xi_g\omega_g\lambda_{2,i}-\omega_g^2\lambda_{4,i}$，其中 $\lambda_{2,i}$、$\lambda_{4,i}$的含义见式(15)。

按本文方法，地面加速度模态强度系数 κ_i 如表1所示，其中等效阻尼比 $\xi_i=\mathrm{real}(p_i)/|p_i|$。

由表1可知，模态1的特征值为复共轭项，其等效频率为 ω_g，等效阻尼为 ξ_g，且 $\ddot{x}_g$ 的模态强度系数不等于零，而其余模态的强度系数均等于0。这与场地的地震动仅与场地的动力特征有关、而与结构的特征无关所决定，从侧面论证了本文方法的正确性。

表1 地面加速度 $\ddot{x}_g$ 的模态强度系数

Tab. 1 Modal intensity coefficients of ground acceleration $\ddot{x}_g$

模态数	特征值 p_i	等效频率 $\lvert p_i\rvert$	等效阻尼比 ξ_i	模态强度系数 κ_i
1	−11.311 1∓10.902 3i	15.71	0.72	−11.311 2∓0.416 5i
2	−0.616 9∓0.159 6i	15.98	0.04	0
3	−124.367 5	124.36	1.00	0
4	−254.369 1	254.36	1.00	0

本文方法中，基于Kanai-Tajimi谱的地面绝对加速度激励功率谱，由式(30)、式(41)可得

$$S_{\ddot{x}_g}(\omega) = 2S_0\sum_{k=1}^{6}\sum_{i=1}^{6}\frac{\kappa_i\kappa_k}{p_k+p_i}\frac{p_k}{\omega^2+p_k^2} \qquad (42)$$

传统方法中，基于Kanai-Tajimi谱的地面绝对加速度激励功率谱其表达式为

$$\bar{S}_{\ddot{x}_g}(\omega) = \frac{\omega_g^4+4\xi_g^2\omega_g^2\omega^2}{(\omega_g^2-\omega^2)^2+4\xi_g^2\omega_g^2\omega^2}S_0 \qquad (43)$$

图1绘制了式(42)所表示的本文方法和式(43)所表示的传统方法的绝对加速度功率谱密度函数图，绘图区间取[0,60] rad/s，绘图间距为2 rad/s。观察图1，两者完全重合，验证了本文方法的分析功率谱的正确性。

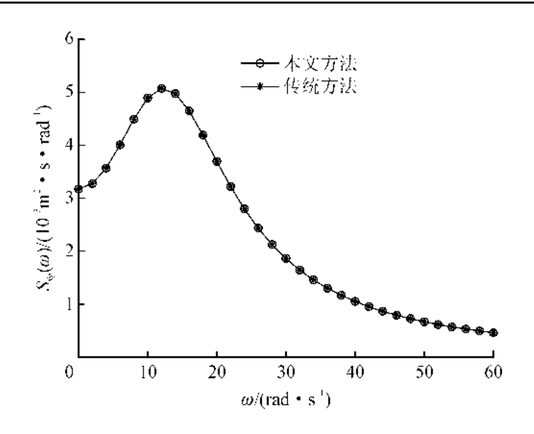


图 1　地面加速度功率谱对比图

Fig. 1　Power spectrum comparison of ground acceleration

6.2　结构位移功率谱对比分析

本文方法中，基于 Kanai-Tajimi 谱的单自由度结构的相对于地面的位移功率谱，由式(30)得

$$S_x(\omega) = 2S_0 \sum_{k=1}^{6} \sum_{i=1}^{6} \frac{\mu_k \mu_i}{p_k + p_i} \frac{p_k}{\omega^2 + p_k^2} \quad (44)$$

传统方法中，系统的幅频特性及其基于 Kanai-Tajimi 谱的单自由度结构的相对于地面的位移功率谱其表达式分别为

$$\bar{S}_x(\omega) = \frac{1}{H(j\omega)} \frac{1}{H(-j\omega)} \bar{S}_{\ddot{x}_g} m^2 \quad (45)$$

式中 $H(j\omega) = \left(k - m\omega^2 + \frac{c\alpha_1 j\omega}{\alpha_1 + j\omega} + \frac{c\alpha_2 j\omega}{\alpha_2 + j\omega}\right)$，$j = \sqrt{-1}$。

图 2　结构位移功率谱对比图

Fig. 2　Comparison of PDF of structural displacement

图 2 为本文方法与传统方法中结构位移的功率谱密度函数图。由图 2 可知，本文方法与传统方法的曲线完全吻合，验证了本文方法计算结构响应功率谱密度函数的正确性。本文方法为式(44)，相较传统方法的式(45)更为简明。

6.3　计算效率及精度

根据虚拟激励法，结构响应的 0 ~ 2 阶谱矩计算式为

$$\beta_0 = \sigma_x^2 = \int_0^\infty \bar{S}_x(\omega) d\omega \quad (46a)$$

$$\beta_1 = \int_0^\infty \bar{S}_x(\omega) \omega d\omega \quad (46b)$$

$$\beta_2 = \sigma_{\dot{x}}^2 = \int_0^\infty \bar{S}_x(\omega) \omega^2 d\omega \quad (46c)$$

式中 $\bar{S}_x(\omega)$ 见式(45)。

观察式(46)的响应值计算，仅能采用数值方法在[0, +∞)进行求解，显然是无法实现的。由图 2 可知，随着频率 ω 的增大，功率谱越来越小。本算例中，积分区间取[0,250] rad/s，积分步长取 3 种情况对比验证虚拟激励法的精度问题：①积分步长为 1 rad/s；②积分步长为 0.5 rad/s；③积分步长为 0.1 rad/s。表 2 列出两种方法的 0 ~ 2 阶谱矩精度对比，表 3 列出两种方法的 0 ~ 2 阶谱矩计算效率对比。

表 2　0 ~ 2 阶谱矩精度对比

Tab. 2　Accuracy comparison of 0-2 order spectral moments

方法	β_0/m^2	$\beta_1/(m^2\cdot s^{-1})$	$\beta_2/(m^2\cdot s^{-2})$
本文方法	$4.530\ 16\times10^{-5}$	$7.001\ 94\times10^{-4}$	0.011 13
①	$4.700\ 09\times10^{-5}$	$7.276\ 42\times10^{-4}$	0.011 57
②	$4.533\ 03\times10^{-5}$	$7.006\ 61\times10^{-4}$	0.011 14
③	$4.530\ 16\times10^{-5}$	$7.001\ 94\times10^{-4}$	0.011 13

由于虚拟激励法的谱矩计算采用数值积分，其分析精度随着积分步长减小而提高。由表 2 可知，虚拟激励法的 0 ~ 2 阶谱矩计算精度，随着积分步长从1 rad/s、0.5 rad/s 和 0.1 rad/s 的减小，所得谱矩值逐渐接近本文方法所得谱矩值。理论上说明本文方法为封闭解，且精度较好。

表 3　0 ~ 2 阶谱矩计算效率对比

Tab. 3　Comparison of computing efficiency of 0 ~ 2 order spectral moments

方法	虚拟激励法	本文方法
①	0.087 s	
②	0.101 s	0.024 s
③	0.229 s	

由表 3 可知，虚拟激励法计算谱矩的耗时随着积分步长的减小而增加。由表 2 可知，积分步长为 1 rad/s时，精度较差，积分时间是本文方法的 3.6 倍；积分步长为 0.1 rad/s 时在取 6 位有效数值的情况下，两者完全一致，而耗时却是本文方法的 9.5

倍,因此本文方法的计算效率较高。

6.4 结构动力可靠度

结构的层间位移取层高 H 的 1/250,$H=6.0$ m,按上下界限均取 24 mm,荷载持续时间 $T=15$ s,可靠度分析的基本参数如表 4 所示。

由于侧移方差为 6.61 m,远小于 24 mm,但可靠度也只有 0.947 35,不满足现行规范要求,说明动力对结构的影响不能仅根据侧移值来判定。

表 4 响应方差及可靠度计算参数

Tab. 4 Response variance and reliability calculation parameters

σ_x/m	$\sigma_{\dot{x}}$/(m·s^{-1})	q_s	p_f
$6.613\ 52\times10^{-3}$	$7.825\ 15\times10^{-2}$	0.167 02	0.947 35

7 结　论

本文对指数型核函数的非黏滞阻尼模型下的结构基于 Kanai-Tajimi 谱随机地震动响应进行了研究,结论如下。

1)非黏滞阻尼模型采用指数型核函数时,推导了其精确的一阶微分型本构关系,便于与结构体系的动力方程联合求解结构响应。

2)Kanai-Tajimi 谱的滤波方程将复杂的地面运动激励精确地表示成具有简明协方差关系的白噪声随机地震动,其与结构的运动方程联合建模,利用复模态方法从时域角度便于获得结构响应方差的简明闭式解和从频域角度获得结构响应的 0 ~ 2 阶谱矩的简明闭式解,为结构动力可靠度分析提供了一种新的路径。

3)通过与虚拟激励法对比,本文方法在分析结构响应方差和谱矩时为封闭解,具有效率高和精度好的优点,同时可用来验证虚拟激励法谱矩分析时的精度问题。

4)由于本文复模态法对体系进行解耦,故本文方法同样适用于多自由度非黏滞阻尼结构基于 Kanai-Tajimi谱的地震动响应分析。

参考文献

[1] 胡聿贤. 地震工程学[M]. 第二版. 北京:地震出版社,2006.

[2] 周锡元,吴育才. 工程抗震的新发展[M]. 北京:清华大学出版社,2002.

[3] 段绍伟,向湘林,沈蒲生. 复杂阻尼结构阻尼模型研究[J]. 振动与冲击,2011,30(2):73-76.(DUAN Shaowei,XIANG Xianglin,SHEN Pusheng. Damping model of a complex structure[J]. Journal of vibration and shock,2011,30(2):73-76(in Chinese)).

[4] 尚守平,甘宜诚,蒋林. 结构振动阻尼理论模型探究及实验分析[J]. 地震工程与工程振动,2015,35(2):166-171.(SHANG Shouping, GAN Yicheng, JIANG Lin. Theoretical research and experimental analysis of structural damping[J]. Seismic engineering and engineering vibration, 2015, 35 (2): 166-171 (in Chinese)).

[5] BIOT M A. Linear thermodynamics and the mechanics of solids[C]//Proceedings of the third US national congress on applied mechanics. New York:ASME,1958:1-18.

[6] LIU Q M. Explicit computational method of dynamic response for non-viscously damped structure systems[J]. Mechanics research communications,2016(71):48-55.

[7] LIU Q M. Computational method of the dynamic response for non-viscously damped structure systems[J]. Journal of engineering mechanics,2014,140(11):41-45.

[8] 段忠东,沈洪宇. 非黏滞阻尼系统时程响应分析的精细积分方法[J]. 计算力学学报,2009,26(5):638-644.(DUAN Zhongdong, SHEN Hongyu. Time-history analysis of a non-viscous damped system using precise integration[J]. Chinese journal of computational mechanics,2009,26 (5):638-644 (in Chinese)).

[9] SHEN R J. Direct integration for non-viscous structural systems and its simplification[J]. Mecanics research communications, 2019, 95:8-15.

[10] KANAI K. Semi-empirical formula for the seismic characteristics of the ground motion[J]. Bulletin of the earthquake research institute, University of Tokyo,1957,35(2):308-325.

[11] TAJIMI H. A statistical method of determining the maximum response of a building structure during an earthquake[C]//Proceedings of the second world conference on earthquake engineering. Tokyo,Japan:[s. n.],1960:781-797.

[12] 方同. 工程随机振动[M]. 北京:国防工业出版社,1995.

[13] 林家浩. 随机振动的虚拟激励法[M]. 北京:科学出版社,2004.

[14] 林家浩,张亚辉,赵岩. 虚拟激励法在国内外工程界的应用回顾与展望[J]. 应用数学和力学,2017,38(1):1-32.(LIN Jiahao,ZHANG Yahui,ZHAO Yan. The pseudo-excitation method and its industrial applications in China and abroad[J]. Applied mathematics and mechanics,2017,38 (1):1-32(in Chinese)).

[15] 李创第,柏大炼,邹万杰,等. 设置支撑的广义 Maxwell 阻尼器系统基于非平稳巴斯金谱的地震响应分析[J]. 应用力学学报,2018,35(5):1050-1057.(LI Chuangdi, BAI Dalian, ZOU Wanjie, et al. Calculation method for fracture bearing capacity of dangling concrete pavement plate at the corner of highway along river[J]. Chinese journal of applied mechanics,2018,35 (5):1050-1057 (in Chinese)).

[16] 邹万杰,马媛,李创第,等. 带支撑 Maxwell 阻尼器多层隔震结构的随机地震响应分析[J]. 振动与冲击,2017,36(21):213-219.(ZOU Wanjie,MA Yuan,LI Chuangdi,et al. Random seismic response analysis with multi-layer editing structure supporting Maxwell dampers[J]. Journal of vibration and shock,2017,36 (21):213-219(in Chinese)).

[17] 吴泽玉,王东炜,李玉河.复阻尼结构动力方程的增维精细积分法[J].振动与冲击,2017,36(2):107-110.(WU Zeyu, WANG Dongwei, LI Yuhe. Magnified dimension precise integration method for the dynamic equations of complex damped structure[J]. Journal of vibration and shock, 2017, 36(2): 107-110(in Chinese)).

[18] 王伟东,吴冬梅,董为,等.基于虚拟激励和精细积分的移动手臂非平稳随机激励下振动分析[J].振动与冲击,2013,32(20):72-75.(WANG Weidong, WU Dongmei, DONG Wei, et al. Non-stationary random vibration analysis for a mobile manipulator based on PEM-PIM[J]. Journal of vibration and shock, 2013, 32(20):72-75 (in Chinese)).

[19] 葛新广,龚景海,李创第.线性结构基于 Kanai-Tajimi 谱的随机地震动响应分析的新解法[J].振动与冲击,2020,39(22):60-66.(GE Xinguang, GONG Jinghai, LI Chuangdi. A new solution method for random seismic response analysis of linear structures based on Kanai Tajimi spectrum[J]. Journal of vibration and shock, 2020, 39(22):60-66 (in Chinese)).

[20] 李创第,陈明杰,葛新广.基于 Clough-Penzien 谱激励的指数型非黏滞阻尼结构随机地震动响应简明封闭解[J].应用数学和力学,2021,42(3):282-291.(LI Chuangdi, CHEN Mingjie, GE Xinguang. Concise closed form solution of random ground motion response of exponential non viscous damping structures excited by Clough-Penzien spectrum[J]. Applied mathematics and mechanics, 2021, 42(3):282-291(in Chinese)).

[21] 刘强,王妙芳.基于首次超越破坏时间概率的结构动力可靠性分析[J].应用力学学报,2019,36(2):480-484.(LIU Qiang, WANG Miaofang. The reliability analysis of structures based on failure probability of first-passage time[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2019, 36 (2):480-484 (in Chinese)).

[22] 曹宏,李桂青,李秋胜.结构动力可靠性理论及其应用[M].北京:地震出版社,1993.

[23] VANMARCKE E H. Properties of spectral moments with applications to random vibration[J]. Journal of engineering mechanics, 1972(198):425-446.

(编辑　张璐)